**Федеральное государственное образовательное**

**бюджетное учреждение**

**высшего образования**

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ**

**ФЕДЕРАЦИИ»**

**(Финансовый университет)**

**Факультет**

**информационных технологий и анализа больших данных**

**Домашнее задание № 5**

«Метод внутренней точки.»

Студенты группы ПМ19-2:

Жигулина Юлия

Коротенко Виолетта

Морозов Михаил

Пономаренко Александр

Васильева Александра

Аракелян Рушан

Брашич Илья

Руководитель:

Аксенов Дмитрий Андреевич

Москва 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

[1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 3](#_Toc106110133)

[1.1 Прямой метод внутренней точки. 3](#_Toc106110134)

[1.2 Прямо-двойственный метод внутренней точки. 4](#_Toc106110135)

[1.3 Метод Ньютона 5](#_Toc106110136)

[2. АЛГОРИТМЫ 5](#_Toc106110137)

[2.1 Прямой метод внутренней точки. 5](#_Toc106110138)

[2.2 Прямо-двойственный метод внутренней точки. 7](#_Toc106110139)

[1.3 Метод Ньютона 8](#_Toc106110140)

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

## **1.1 Прямой метод внутренней точки.**

Задача условной оптимизации:

где,

Можем представить (1) в виде:

где – индикаторная ф-я:

Минимизируемая ф-я в задаче (2) не дифференцируема. Ввиду этого аппроксимируем ф-ю . Так, задача (2) преобразуется в:

где – параметр.

Пусть – оптимальные прямая и двойственная точка (3). Тогда введём:

Данные точки являются допустимыми для двойственной задаче (1). Тогда, двойственная функция:

Получаем:

Видим, что при росте решение (3) сводится к решению (1). Так, является решением системы:

Понятно, что возможно решение (1) через (3) при . Таким образом метод логарифмических барьеров выглядит, как:

1. Задаём:
2. Решаем (3) с . Получаем
3. Если , то возвращаем . Если нет, то пункт 4.
4. , и пункт 2.

## **1.2 Прямо-двойственный метод внутренней точки.**

Рассматривается проблема (1). Минимизируется для убывающей последовательности параметров . Решение подзадачи удовлетворяет:

где – реализация функции Лагранжа. На каждой итерации вычисляется направление для системы:

Преобразуем:

Без членов порядка получаем:

где – Гессиан Лагранжиана, – транспонированный Якобиан векторной ф-ии , – диагональная матрица из элементов, – диагональная матрица из элементов,

## **1.3 Метод Ньютона**

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности точки :

где – остаточная сумма, – квадратичная форма. Тогда можем описать поведение функцией:

Минимизируем , используя условие:

где – положительно определённая матрица Гессе при всех . Тогда функции (2) в окрестности точки вычисляется, как:

# **2. АЛГОРИТМЫ**

## **2.1 Прямой метод внутренней точки.**

Входные данные

*–* функция, которую мы будем минимизировать*,*

*–* ограничения, приведенные в нормальную форму ,

*–* параметр точности,

*–* мультипликатор при изменении значений,

*–* параметр *.*

1. Записываем функцию Лагранжа
2. Итерационная формула метода Ньютона для минимизации функции трех переменных имеет вид:

Получается, что *.* Первоначальная точка находится методом первой фазы.

1. Найдем градиент и матрицу Гессе функции

Считаем градиент функции по каждой переменной до тех пор, пока .

1. Возьмем градиент от функции

Задача оптимизации будет выглядеть следующим образом:

1. Находим значения
2. Получаем значения и , находим
3. Проверяем выполнение следующих условий:

Если все условия выполнены, то алгоритм закончен. В противном случае меняем значения на следующие:

*.*

## **2.2 Прямо-двойственный метод внутренней точки.**

Входные данные:

*–* функция, которую мы будем минимизировать*,*

– ограничения,

– параметр

1. Проводится тест на оптимальность, который основан на функции оценки, измеряющий нарушение условие оптимальности:

Если , где , то алгоритм прекращает свою работу.

– решение барьерной подзадачи удовлетворяет следующей возмущенной первично-двойственной системе уравнений и неравенств:

1. Вычисляется прямо-двойственное направление. Находится решение и вычисляется линейная система:

Где – Гессиан Лагранжиана,

– транспонированная Якобиана векторная функция ,

– диагональная матрица из элементов,

– диагональная матрица из элементов,

– единичная матрица .

1. Находится прямая и двойственная длина шага
   1. где
   2. находится из алгоритма *backtracking line search*. находится как первый элемент последовательности где *.* Предполагается, что выбор шагов

и гарантирует, что внутри допустимой области и положительна.

1. Обновляется значение и
2. Обновляется параметр

## **1.3 Метод Ньютона**

Входные данные

*–* функция, которую мы будем минимизировать*,*

*–* ограничения, типа равенства, ,

*–* матрица коэффициентов ограничений ,

*-*  вектор свободных членов ограничений ,

*–* вектор коэффициентов целевой функции ,

*–* параметр точности,

*–* параметр,

*–* параметр *.*

1. Записываем двойственную задачу

|  |  |
| --- | --- |
| Исходная | Двойственная |
| Найти максимум | Найти минимум |
| При ограничениях |  |

По условию, у нас ограничения в виде равенств, поэтому в исходной и двойственной задачах всегда равенства.

1. Найдем начальную точку

– это подматрица матрицы размера

*–* это подмножество вектора размера .

1. Проходимся циклом

*-* матрица, у которой по диагонали значения:

*, .*

Если то .

Иначе .